Exercice n° 6

a) on sait que $\forall \alpha \in \mathbb{R} : -1 \le \cos\alpha \le 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \le \cos \pi x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1-\cos \pi x$

Pour $x>0$ on aura:

$$0 \le \frac{1-\cos \pi x}{x} \le \frac{2}{x}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3 \le 3+\frac{1-\cos \pi x}{x} \le 3+\frac{2}{x}$$

Donc $\forall x>0 : 3 \le f(x) \le 3+\frac{2}{x}$

b) Appliquant le théorème de comparaison:

On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}+3=3$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

*/ $\lim\limits_{x\to(-1)^-} 2x+\sqrt{x^2-1}=-2=f(-1)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} 2x^3-3x^2+3$

$=-2=f(-1)$

f Continue à droite et à gauche en

$x_0=-1$ D'où f est continue en $x_0=-1$.

*/ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=3=f(0)$

$\boxed{\lim\limits_{\alpha\to0} \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}=0}$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} 3+\frac{1-\cos \pi x}{\pi x}\times\pi$

$=3+0=3=f(0)$

Donc f continue en 0.

Dérivabilité de f a gauche en $x_0=-1$:

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{2x+\sqrt{x^2-1}+2}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{2x+2}{x+1}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{2(x+1)}{x+1}+\frac{x^2-1}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^-} 2+\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}=2+\frac{-2}{0^+}=-\infty.$

f n'est dérivable a gauche en $x_0=-1$.

C_f admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse $x_0=-1$.

Dérivabilité a gauche on 0:

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{2x^3-3x^2+3-3}{x}=\lim\limits_{x\to0^-} 2x^2-3x=0=f'_g(0)$

Dérivabilité à droite en 0 :

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{3+\frac{1-\cos \pi x}{x}-3}{x}=\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1-\cos \pi x}{x^2}=\frac{\pi^2}{2}=f'_d(0)$

Car: $\boxed{\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos ax}{x^2}=\frac{a^2}{2}}$

$f'_g(0)\neq f'_d(0)$: f non dérivable en $x_0=0$.

Exercice n° 7

a/ $\lim\limits_{x\to0} \frac{2\sin x+1-\cos x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0} 2\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}+\underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{0}=2\neq f(0)=1$

f n'est pas continue en 0.

b/ f n'est pas continue en 0 donc f n'est pas Dérivable en 0

Exercice n° 8

a/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\cos x$.

b/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-\sin x$.

c/ f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x)=\begin{cases}1 & si\ x>0\\ -1 & si\ x<0\end{cases}$

d/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=3x^2-10x+7$

e/ f est dérivable pour tout x vérifiant : $x^2+x-2\neq0$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ et

$f'(x)=\frac{2(x^2+x-2)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$

$=\frac{2x^2+2x-4-(4x^2+4x+1)}{(x^2+x-2)^2}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x^2-2x-5}{(x^2+x-2)^2}$.

g/ f est dérivable pour $4x-1>0$

Donc f est dérivable sur $\left]\frac{1}{4},+\infty\right[$

et $f'(x)=\frac{(4x-1)'}{2\sqrt{4x-1}}=\frac{2}{\sqrt{4x-1}}$

Qarray.tn - Aqra Plus - Qarray.tn